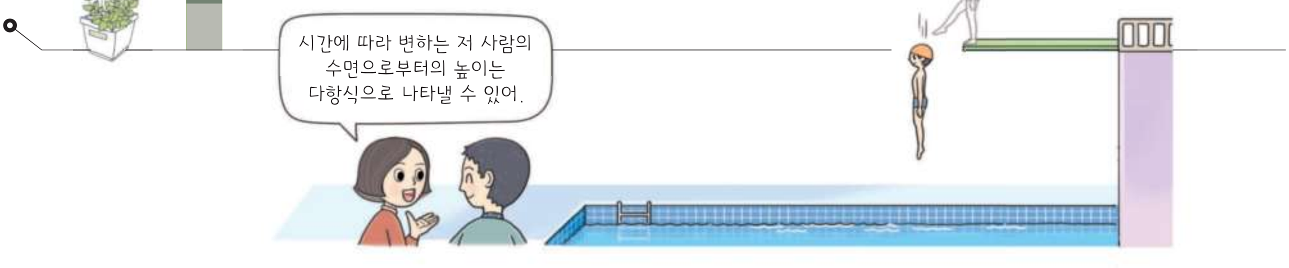
다항식의 연산

성취 기준 • 다항식의 사칙연산을 할 수 있다.



다항식은 어떻게 정리할까?

탐구 학습

열기

다음 두 다항식의 차수를 구하고, 차수를 더 쉽게 구할 수 있는 것을 말하여 보자.

(1) $2x^2+5+4x^3+x^5+x+3x^4$ (2) $x^5+3x^4+4x^3+2x^2+x+5$

다지기

두 다항식은 모두 차수가 5이고, 차수를 더 쉽게 구할 수 있는 것은 (2)이다.

(1)

(2)

키우기

다항식은 어떻게 정리하는 것이 편리할까?

다항식의 정리 다항식을 한 문자에 대하여 차수가 높은 항부터 낮은 항의 순서로 정리하거나, 차수가 낮은 항부터 높은 항의 순서로 정리하면 식의 계산이 편리하다.

개념 확인 다항식 $4xy^2-3x+x^2y+y$를 x에 대하여 정리하기

차수가 높은 항부터 낮은 항의 순서로 정리	차수가 낮은 항부터 높은 항의 순서로 정리
➡ $yx^2+(4y^2-3)x+y$	➡ $y+(4y^2-3)x+yx^2$

문제 1 다음 다항식을 x에 대하여 차수가 높은 항부터 낮은 항의 순서로 정리하시오.

(1) $5x^2-x+4+x^3$ (2) $3xy^2+x+2y^3-4x^2y-y+1$

다항식의 덧셈과 뺄셈은 어떻게 할까?

다항식의 덧셈과 뺄셈

이전에 배운 내용
문자와 차수가 같은 항을 동류항이라 한다.

다항식의 덧셈은 동류항끼리 모아서 정리한다. 또 다항식의 뺄셈은 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾸어서 더한다. 즉 두 다항식 A, B에 대하여 $A-B$는 A에 B의 각 항의 부호를 바꾼 $-B$를 더한 것과 같으므로

$$A-B=A+(-B)$$

이다.

| 다항식의 덧셈과 뺄셈하기

예제 1

두 다항식 A, B가

$$A=x^3-x^2+4,\ B=-4x^3-3x+5$$

일 때, 다음을 구하시오.

(1) $A+B$　　(2) $A-B$

풀이 ▶ (1) 동류항끼리 모아서 정리하면

$$\begin{aligned}A+B&=(x^3-x^2+4)+(-4x^3-3x+5)\\&=(1-4)x^3-x^2-3x+(4+5)\\&=-3x^3-x^2-3x+9\end{aligned}$$

(2) 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾸어서 더하면

$$\begin{aligned}A-B&=(x^3-x^2+4)-(-4x^3-3x+5)\\&=(x^3-x^2+4)+(4x^3+3x-5)\\&=(1+4)x^3-x^2+3x+(4-5)\\&=5x^3-x^2+3x-1\end{aligned}$$

답 (1) $-3x^3-x^2-3x+9$　(2) $5x^3-x^2+3x-1$

따라 하기

두 다항식 A, B가

$$A=3x^2-4x+5,\ B=x^3+3x-2$$

일 때, 다음을 구하시오.

(1) $A+B$　　(2) $A-B$

풀이 ▶ (1) 동류항끼리 모아서 정리하면

$A+B=$ ________________

$=$ ________________

$=$ ____________

(2) 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾸어서 더하면

$A-B=$ ________________

$=$ ________________

$=$ ________________

$=$ ____________

답 (1) ____________　(2) ____________

문제 2 두 다항식 A, B가 다음과 같을 때, $A+B$와 $A-B$를 구하시오.

(1) $A=-x^3+x^2-2x+3,\ B=2x^3+x-5$

(2) $A=x^2-2xy+y^2,\ B=2x^2+3xy-3y^2$

(3) $A=x^3-2x^2y+xy+y^3,\ B=-2x^3+x^2y+3xy-2y^3$

다항식의 덧셈에 대한 성질

다항식의 덧셈에서는 수의 덧셈에서와 같이 다음 성질이 성립한다.

+ 덧셈에 대한 결합법칙이 성립하므로
$(A+B)+C$,
$A+(B+C)$
를 괄호를 생략하여
$A+B+C$
로 나타내기도 한다.

다항식의 덧셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

❶ 교환법칙 $A+B=B+A$

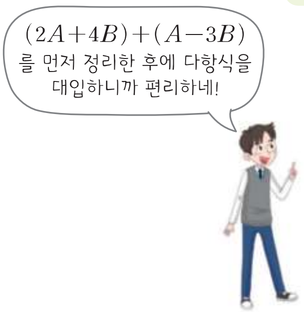
❷ 결합법칙 $(A+B)+C=A+(B+C)$

| 다항식의 덧셈에 대한 성질 이해하기

예제 2 두 다항식 A, B가

$$A=x^3+4x^2+3,\ B=2x^3-3x^2+x+5$$

일 때, $(2A+4B)+(A-3B)$를 계산하시오.



풀이 ▶
$$\begin{aligned}(2A+4B)+(A-3B)&=2A+\underline{4B+A}-3B\\&=2A+\underline{A+4B}-3B &&\text{교환법칙}\\&=(2A+A)+(4B-3B) &&\text{결합법칙}\\&=3A+B\\&=3(x^3+4x^2+3)+(2x^3-3x^2+x+5)\\&=(3x^3+12x^2+9)+(2x^3-3x^2+x+5)\\&=(3+2)x^3+(12-3)x^2+x+(9+5)\\&=5x^3+9x^2+x+14\end{aligned}$$

답 $5x^3+9x^2+x+14$

문제 3 세 다항식 A, B, C가

$$A=x^3+x^2+1,\ B=x^3+2x^2-x+2,\ C=-x^3+2x+5$$

일 때, 다음을 계산하시오.

(1) $(A-3B)+(2A+B)$ (2) $(2A-B)-(3B-C)$

문제 4 두 다항식 A, B가

$$A=x^2+4y^2,\ B=2x^2-y^2$$

일 때, 다음 등식을 만족시키는 다항식 X를 구하시오.

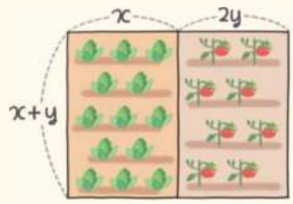
(1) $A+X=B$ (2) $2X-3A=2B+X$

다항식의 곱셈은 어떻게 할까?

탐구 학습

열기

넓이가 $(x+2y)(x+y)$인 직사각형 모양의 밭을 오른쪽 그림과 같이 나누어 왼쪽에는 상추를, 오른쪽에는 토마토를 재배하였다. 다음 물음에 답하여 보자.



(1) 상추밭과 토마토밭의 넓이를 식으로 나타내고 전개하시오.

(2) (1)의 결과를 이용하여 다음 등식이 성립함을 설명하시오.

$$(x+2y)(x+y)=x^2+3xy+2y^2$$

다지기

(1) 상추밭의 넓이는 $x(x+y)=x^2+xy$

토마토밭의 넓이는 $2y(x+y)=2xy+2y^2$

(2) 전체 밭의 넓이는 상추밭과 토마토밭의 넓이의 합과 같으므로 다음 등식이 성립한다.

$$(x+2y)(x+y)=(x^2+xy)+(2xy+2y^2)=x^2+3xy+2y^2$$

키우기

$(x+2y)(x+y)$와 같은 다항식의 곱셈은 어떻게 할까?

다항식의 곱셈과 곱셈에 대한 성질

다항식의 곱셈은 분배법칙을 이용하여 전개한 다음 동류항끼리 모아서 정리한다.

예를 들어 다항식 $(x+2y)(x+y)$를 전개하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(x+2y)(x+y)&=(x+2y)x+(x+2y)y\\&=(x^2+2xy)+(xy+2y^2)\\&=x^2+(2xy+xy)+2y^2\\&=x^2+3xy+2y^2\end{aligned}$$

이전에 배운 내용

다항식의 곱셈을 전개할 때는 다음 지수법칙을 이용한다.

$a^m a^n = a^{m+n}$

(단, m, n은 자연수)

다항식의 곱셈에서는 수의 곱셈에서와 같이 다음 성질이 성립한다.

다항식의 곱셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

❶ 교환법칙 $AB=BA$

❷ 결합법칙 $(AB)C=A(BC)$

❸ 분배법칙 $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

곱셈에 대한 결합법칙이 성립하므로

$(AB)C$, $A(BC)$

를 괄호를 생략하여

ABC

로 나타내기도 한다.

| 다항식의 곱셈에 대한 성질 이해하기

예제 3 다항식 $(x-3)(x+2)(x+3)$을 전개하시오.

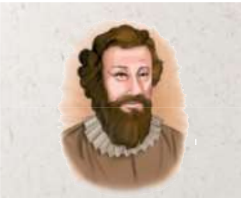
풀이 ▶
$$
\begin{aligned}
&(x-3)(x+2)(x+3)\\
&=(x+2)(x-3)(x+3) && \text{교환법칙}\\
&=(x+2)\{(x-3)(x+3)\} && \text{결합법칙}\\
&=(x+2)(x^2-9)\\
&=(x+2)x^2-(x+2)\times 9 && \text{분배법칙}\\
&=x^3+2x^2-9x-18
\end{aligned}
$$

답 $x^3+2x^2-9x-18$

문제 5 다항식 $(x+2)(x-1)(x-2)$를 전개하시오.

곱셈 공식 (1)

다항식의 곱셈은 분배법칙을 이용하여 전개할 수 있지만 특수한 형태의 다항식의 곱셈은 중학교에서 배운 다음 곱셈 공식을 이용하면 편리하게 전개할 수 있다.


비에트
(Viéte, F., 1540~1603)
문자를 사용한 식을 도입한 프랑스의 수학자

곱셈 공식 (1)

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
4. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
5. $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

| 곱셈 공식을 이용하여 전개하기

예제 4 다항식 $(a+b+c)^2$을 전개하시오.

$a+b$를 한 묶음으로 생각하여 전개하면 편리하다.

풀이 ▶
$$
\begin{aligned}
(a+b+c)^2&=\{(a+b)+c\}^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2\\
&=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2\\
&=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca
\end{aligned}
$$

답 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

문제 6 다항식 $(a+b-c)^2$을 전개하시오.

예제 5 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+b)^3$ (2) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

풀이▶ (1) $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$=(a+b)a^2+(a+b)\times 2ab+(a+b)b^2$

$=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(2) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)a^2-(a+b)ab+(a+b)b^2$

$=a^3+a^2b-a^2b-ab^2+ab^2+b^3=a^3+b^3$

답 (1) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (2) a^3+b^3

문제 7 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a-b)^3$ (2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

곱셈 공식 (2) 일반적으로 다항식의 곱셈에서는 다음과 같은 곱셈 공식이 성립한다.

곱셈 공식(2)

❶ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

❷ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

❸ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

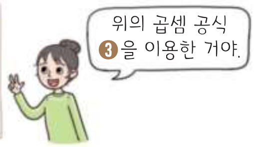
❹ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

❺ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

개념 확인 곱셈 공식을 이용하여 전개하기

$(a-2b)^3=a^3-3a^2\times 2b+3a\times(2b)^2-(2b)^3$

$=a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$



문제 8 곱셈 공식을 이용하여 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x-y+3z)^2$ (2) $(a+3b)^3$

(3) $(x+1)(x^2-x+1)$ (4) $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$

다항식의 나눗셈은 어떻게 할까?

다항식의 나눗셈

다항식의 나눗셈은 각 다항식을 차수가 높은 항부터 낮은 항의 순서로 정리한 다음 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

- 자연수의 나눗셈과 비교해 보면

$$\begin{array}{rrl} & 21 & \leftarrow \text{몫} \\ 12 \,\big) & 256 & \\ & 24 & \leftarrow 12\times 2 \\ \hline & 16 & \\ & 12 & \leftarrow 12\times 1 \\ \hline & 4 & \leftarrow \text{나머지} \end{array}$$

예를 들어 $(2x^2+5x+6)\div(x+2)$는 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{array}{rrl} & 2x+1 & \leftarrow \text{몫} \\ x+2 \,\big) & 2x^2+5x+6 & \\ & 2x^2+4x & \leftarrow (x+2)\times 2x \\ \hline & x+6 & \\ & x+2 & \leftarrow (x+2)\times 1 \\ \hline & 4 & \leftarrow \text{나머지} \end{array}$$

- 256을 12로 나누었을 때의 몫은 21, 나머지는 4이므로 $256=12\times 21+4$

따라서 $2x^2+5x+6$을 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 $2x+1$, 나머지는 4이므로

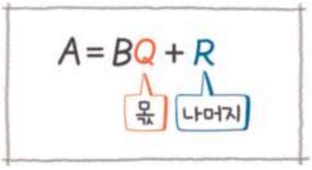
$$2x^2+5x+6=(x+2)(2x+1)+4$$

와 같이 나타낼 수 있다.

일반적으로 다항식 A를 다항식 $B(B\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$$A=BQ+R$$

가 성립한다. 이때 R의 차수는 B의 차수보다 낮다.



특히 $R=0$일 때 A는 B로 나누어떨어진다고 한다.

참고 $A=BQ+R$에서 Q는 몫을 뜻하는 'quotient'의 첫 글자이고, R는 나머지를 뜻하는 'remainder'의 첫 글자이다.

개념 확인

$A=x^3+x^2-x+2$, $B=x+1$일 때, $A=BQ+R$ 꼴로 나타내기

문제 9 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫 Q와 나머지 R를 구하고, $A=BQ+R$ 꼴로 나타내시오.

(1) $A=2x^3-3x^2-x+3$, $B=x-2$ (2) $A=6x^3-3x+7$, $B=x^2-x+1$

조립제법 　다항식 $P(x)$를 일차식으로 나누었을 때의 몫과 나머지는 $P(x)$의 계수만 이용하여 간단하게 구할 수 있다.

다음의 오른쪽과 같이 계수만 이용하여 다항식을 일차식으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하는 방법을 **조립제법**이라 한다.

다항식 $3x^3-x^2-4x-3$을 일차식 $x-2$로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x^2+5x+6 \quad \leftarrow \text{몫} \\
\hline
x-2 & 3x^3-x^2-4x-3 \quad \cdots\cdots\ 3 \\
 & 3x^3-6x^2 \\
\hline
 & 5x^2-4x \quad \cdots\ -1+2\times3=5 \\
 & 5x^2-10x \\
\hline
 & 6x-3 \quad \cdots\ -4+2\times5=6 \\
 & 6x-12 \\
\hline
 & 9 \quad \cdots\ -3+2\times6=9 \leftarrow \text{나머지}
\end{array}$$

몫의 계수

왼쪽의 나눗셈에서 계수만 이용하여 다음과 같이 몫과 나머지를 구할 수 있다.

$$(3x^3\ \ -x^2\ \ -4x\ \ -3)\div(x-2)$$

$x-2=0$에서 $x=2$

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 3 & -1 & -4 & -3 \\
 & & 6 & 10 & 12 \\
\hline
 & 3 & 5 & 6 & \boxed{9}
\end{array}$$

×2 ×2 ×2 ← 나머지

$3x^2+5x+6$ ← 몫

| 조립제법을 이용하여 몫과 나머지 구하기 (1)

예제 6

조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

$$(x^3-3x+1)\div(x-1)$$

풀이 ▶ 조립제법을 이용하여 x^3-3x+1, 즉 $x^3+0\times x^2-3x+1$을 $x-1$로 나누면

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & 0 & -3 & 1 \\
 & & 1 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & \boxed{-1}
\end{array}$$

따라서 구하는 몫은 x^2+x-2

나머지는 -1

답 몫: x^2+x-2, 나머지: -1

따라 하기

조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

$$(x^3-2x^2+3)\div(x+1)$$

풀이 ▶ 조립제법을 이용하여 x^3-2x^2+3, 즉

________________을/를 $x+1$로 나누면

따라서 구하는 몫은 ________

나머지는 ________

답 몫: ________, 나머지: ____

문제 10 　조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(x^3-3x^2-4x+9)\div(x+2)$ 　　(2) $(2x^3-5x^2-3)\div(x-3)$

예제 7 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

$$(2x^3+5x^2-4x+2)\div(2x+1)$$

풀이 ▶ $2x+1=2\left(x+\frac{1}{2}\right)$이므로 조립제법을 이용하여 $2x^3+5x^2-4x+2$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 2 & 5 & -4 & 2 \\ & & -1 & -2 & 3 \\ \hline & 2 & 4 & -6 & \boxed{5} \end{array}$$

이것을 식으로 나타내면

$2x^3+5x^2-4x+2$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2+4x-6)+5$ ❶

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\times 2(x^2+2x-3)+5$

$=(2x+1)(x^2+2x-3)+5$ ❷

따라서 $2x^3+5x^2-4x+2$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지는

몫: x^2+2x-3
나머지: 5

답 몫: x^2+2x-3, 나머지: 5

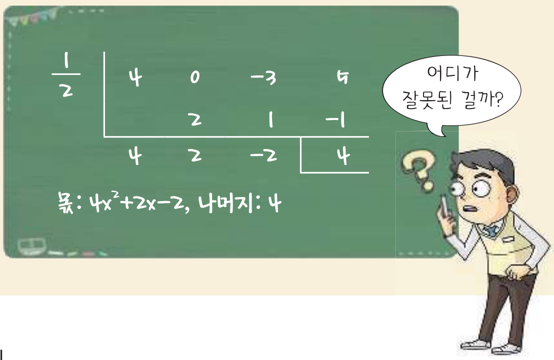
식 ❶에서 $2x^2+4x-6$은 $2x^3+5x^2-4x+2$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫이다. 따라서 $2x^3+5x^2-4x+2$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫은 식 ❷에서와 같이 $2x^2+4x-6$에 $\frac{1}{2}$을 곱한 x^2+2x-3이다.

문제 11 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(4x^3-5x+1)\div(2x-1)$ (2) $(3x^3-7x^2-3x)\div(3x+2)$

생각을 넓히는 수학 오류 찾기

승리는 조립제법을 이용하여 다항식 $4x^3-3x+5$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 다음과 같이 구하였다. 잘못된 부분을 찾아 그 까닭을 설명하고 바르게 풀어 보자.



스스로 확인하기

정답 및 풀이 280쪽

1

다음은 다항식을 전개한 것이다. $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+\boxed{}$

(2) $(a+b)^3=a^3+\boxed{}+3ab^2+b^3$

(3) $(a-b)^3=a^3\boxed{}3a^2b+3ab^2\boxed{}b^3$

(4) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=\boxed{}$

(5) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=\boxed{}$

2

두 다항식 A, B가

$A=x^2-xy+2y^2$, $B=2x^2+2xy-y^2$

일 때, 다음 등식을 만족시키는 다항식 X를 구하시오.

(1) $2A-X=B$

(2) $3A-2(X+B)=A$

3

다음 식을 간단히 하시오.

$$(a+1)(a^2-a+1)-(a-1)(a^2+a+1)$$

4

다음 식의 값을 구하시오.

(1) $a+b+c=6$, $ab+bc+ca=4$일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값

(2) $x+y=5$, $xy=2$일 때, x^3+y^3의 값

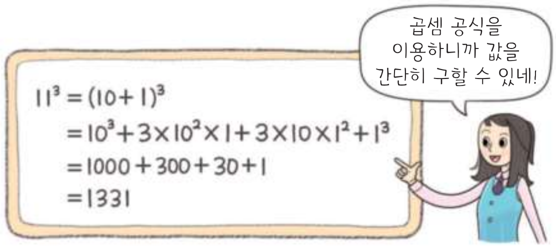
(3) $x-y=2$, $x^2+y^2=8$일 때, x^3-y^3의 값

5

다항식 $4x^3+4x^2+3$을 다항식 A로 나누었을 때의 몫은 $2x+1$이고, 나머지는 $-3x+2$이다. 다항식 A를 구하시오.

6 창의·융합

다음은 곱셈 공식을 이용하여 11^3의 값을 구한 것이다.



위와 같이 곱셈 공식을 이용하여 다음 식의 값을 구하시오.

(1) 99×10101

(2) $99\times101\times10001$

2 항등식과 나머지정리

성취 기준 • 항등식의 성질을 이해한다.
• 나머지정리의 의미를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

항등식에는 어떤 성질이 있을까?

탐구 학습

열기 다음 등식 중에서 항등식인 것을 찾아보자.

(1) $x^2=3x$ (2) $(x+1)^2=x^2+2x+1$

다지기 (1) $x=1$을 대입하면 등식이 성립하지 않으므로 항등식이 아니다.

(2) x에 어떤 값을 대입해도 등식이 항상 성립하므로 x에 대한 항등식이다.

키우기 등식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이 되려면 a, b, c는 각각 어떤 값이어야 할까?

항등식의 성질

중학교에서 주어진 식의 문자에 어떤 값을 대입해도 항상 성립하는 등식이 그 문자에 대한 항등식임을 배웠다.

이제 항등식의 성질을 알아보자.

등식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 x에 어떤 값을 대입해도 항상 성립하므로 $x=0$, $x=1$, $x=-1$일 ❶ 때도 등식은 성립한다. $ax^2+bx+c=0$에

$x=0$을 대입하면 $\quad c=0$

$x=1$, $c=0$을 대입하면 $\quad a+b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$x=-1$, $c=0$을 대입하면 $\quad a-b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

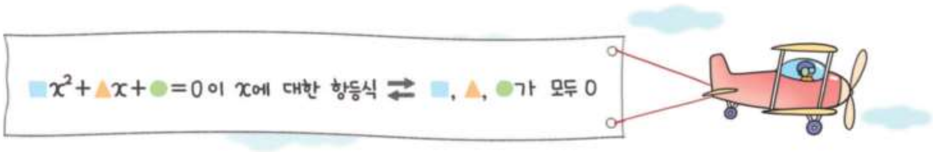
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=0$, $b=0$

따라서 등식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면

$$a=0,\ b=0,\ c=0$$

이다.

거꾸로 $a=0$, $b=0$, $c=0$이면 등식 $ax^2+bx+c=0$은 x에 어떤 값을 대입해도 항상 성립하므로 x에 대한 항등식이다.



일반적으로 항등식의 성질은 다음과 같다.

항등식의 성질

❶ $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=0$, $b=0$, $c=0$이다.
또 $a=0$, $b=0$, $c=0$이면 $ax^2+bx+c=0$은 x에 대한 항등식이다.

❷ $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.
또 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이면 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$은 x에 대한 항등식이다.

| 항등식의 성질 이해하기

예제 1 등식 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면

$$a=a',\ b=b',\ c=c'$$

이 성립함을 설명하시오.

풀이 ▶

주어진 등식의 우변의 항을 모두 좌변으로 이항하여 정리하면	$(a-a')x^2+(b-b')x+(c-c')=0$
이 식이 x에 대한 항등식이므로	$a-a'=0$, $b-b'=0$, $c-c'=0$ 즉 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

문제 1 다음 등식이 x에 대한 항등식이 되게 하는 상수 a, b, c의 값을 구하시오.

(1) $(a-1)x^2+(b+2)x+c+3=0$

(2) $x^2+ax+5=bx^2+3x-c$

미정계수법

항등식의 성질을 이용하여 주어진 등식에서 미지의 계수를 정하는 방법을 **미정계수법**이라 한다.

미정계수법에는 양변의 동류항의 계수를 비교하여 계수를 정하는 방법과 문자에 적당한 수를 대입하여 계수를 정하는 방법이 있다.

| 항등식의 성질을 이용하여 미정계수 구하기

예제 2 다음 등식이 x에 대한 항등식이 되게 하는 상수 a, b의 값을 구하시오.

$$a(x-1)^2+b(x-1)-1=x^2+3x-5$$

풀이 ▶ **방법 1 | 양변의 동류항의 계수 비교하기**

좌변을 전개하여 정리하면	$a(x^2-2x+1)+bx-b-1=x^2+3x-5$ $ax^2-2ax+a+bx-b-1=x^2+3x-5$ $ax^2+(b-2a)x+(a-b-1)=x^2+3x-5$
항등식의 성질을 이용하여 양변의 동류항의 계수를 비교하면	$a=1$ …… ㉠ $b-2a=3$ …… ㉡ $a-b-1=-5$, 즉 $a-b=-4$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면	$a=1$, $b=5$

방법 2 | x에 적당한 수 대입하기

양변에 $x=0$을 대입하면	$a-b-1=-5$, 즉 $a-b=-4$ …… ㉠
양변에 $x=2$를 대입하면	$a+b-1=5$, 즉 $a+b=6$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면	$a=1$, $b=5$

답 $a=1$, $b=5$

문제 2 다음 등식이 x에 대한 항등식이 되게 하는 상수 a, b, c의 값을 구하시오.

(1) $x^3-3x^2+3=(x-1)^3+a(x-1)+b$

(2) $x^3+ax+2=(x+1)(x^2+bx+c)$

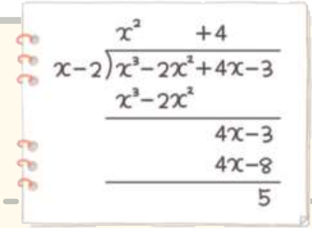
(3) $ax(x+1)+b(x+1)(x-3)+cx(x-3)=x^2-x-6$

나머지정리란 무엇일까?

탐구 학습

열기

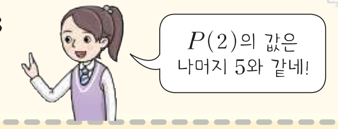
다항식 $P(x)=x^3-2x^2+4x-3$을 일차식 $x-2$로 나누면 오른쪽과 같이 나머지가 5이다. $P(2)$의 값을 구하고, 나머지 5와 비교하여 보자.



다지기

$P(2)=2^3-2\times2^2+4\times2-3$

$=5$



키우기

다항식을 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 직접 나누지 않고도 구할 수 있을까?

나머지정리

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$P(x)=(x-a)Q(x)+R\ (R\text{는 상수})$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=a$를 대입하면

$$P(a)=(a-a)Q(a)+R,\ \text{즉}\quad R=P(a)$$

이다. 이처럼 다항식을 일차식으로 나누었을 때의 나머지는 나눗셈을 직접 계산하지 않고도 쉽게 구할 수 있다.

이상에서 다음과 같은 **나머지정리**가 성립한다.

> 다항식을 일차식으로 나눌 때
> ① 몫과 나머지를 모두 구할 때는 조립제법을 이용하는 것이 편리하다.
> ② 나머지만 구할 때는 나머지정리를 이용하는 것이 편리하다.

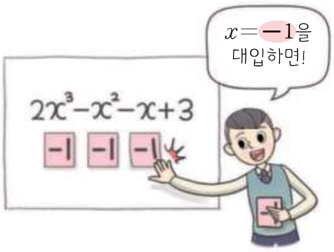
나머지정리

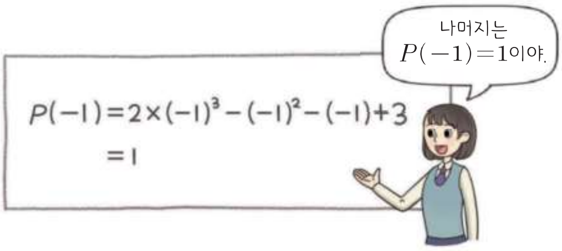
다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$$R=P(a)$$

개념 확인

다항식 $P(x)=2x^3-x^2-x+3$을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지 구하기





문제 3 다항식 $P(x)=x^3-3x^2+x+4$를 다음 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

(1) $x-1$　　(2) $x-2$　　(3) $x+\frac{1}{2}$

| 다항식을 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지 구하기

예제 3 다항식 $P(x)=2x^3-3x^2+5x-4$를 $2x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

풀이 ▶

$P(x)$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면	$P(x)=(2x+1)Q(x)+R$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-\frac{1}{2}$을 대입하면	$P\left(-\frac{1}{2}\right)=0\times Q\left(-\frac{1}{2}\right)+R=R$
따라서 구하는 나머지 R는	$R=P\left(-\frac{1}{2}\right)$ $=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+5\times\left(-\frac{1}{2}\right)-4$ $=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-\frac{5}{2}-4=-\frac{15}{2}$

답 $-\frac{15}{2}$

다항식 $P(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지는 $P\left(-\frac{b}{a}\right)$이다.

문제 4 다항식 $P(x)=2x^3-x+1$을 다음 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

(1) $2x-1$ (2) $3x+2$

| 다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지 구하기

예제 4 다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 3이고, $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -3이다. $P(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

풀이 ▶

$P(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면	$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$
$P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 3이므로	$P(1)=3$ 즉 $a+b=3$ …… ㉠
$P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -3이므로	$P(-2)=-3$ 즉 $-2a+b=-3$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면	$a=2$, $b=1$
따라서 구하는 나머지는	$2x+1$

답 $2x+1$

Q 나머지를 R로 놓고 풀었더니 답이 나오지 않아요. 왜 그런 거죠?

A 나누는 식이 $(x-1)(x+2)$로 이차식이니까 나머지는 일차식 또는 상수입니다. 그래서 나머지를 R가 아니라

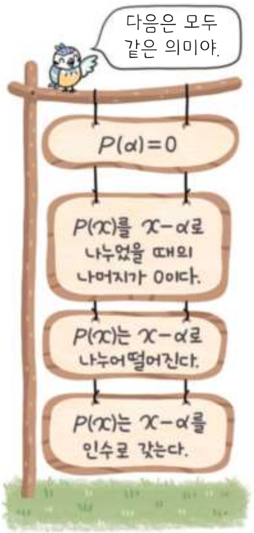
$ax+b$ (a, b는 상수)

로 놓아야 해요.

문제 5 다항식 $P(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 -1이고, $x-4$로 나누었을 때의 나머지가 6이다. $P(x)$를 $(x+3)(x-4)$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

인수정리

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a)$이다. 이때 $P(a)=0$이면 $P(x)$는 $x-a$로 나누어떨어진다. 즉 $x-a$는 $P(x)$의 인수이다.



거꾸로 $x-a$가 $P(x)$의 인수이면, 즉 $P(x)$가 $x-a$로 나누어떨어지면

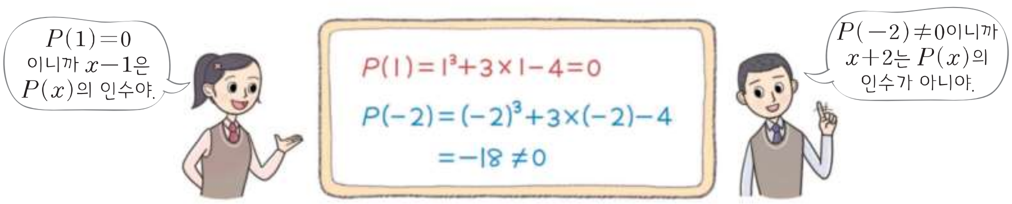
$$P(x)=(x-a)Q(x)$$

이므로 $P(a)=0$임을 알 수 있다.

이상에서 다음과 같은 **인수정리**가 성립한다.

> **인수정리**
> 다항식 $P(x)$에 대하여
> ❶ $P(a)=0$이면 $P(x)$는 일차식 $x-a$로 나누어떨어진다.
> ❷ $P(x)$가 일차식 $x-a$로 나누어떨어지면 $P(a)=0$이다.

개념 확인 다항식 $P(x)=x^3+3x-4$의 인수 찾기



문제 6 다음 일차식 중에서 다항식 x^3+5x^2+2x-8의 인수인 것을 모두 찾으시오.

x,	$x-1$,	$x+1$,	$x+2$

| 인수정리를 이용하여 계수 구하기

예제 5

다항식 $P(x)=x^3-ax+2$가 $x-2$로 나누어떨어지게 하는 상수 a의 값을 구하시오.

풀이 ▶ $P(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지면 인수정리에 의하여 $P(2)=0$

$P(2)=8-2a+2=-2a+10$이므로

$-2a+10=0$, 즉 $a=5$

답 5

따라 하기

다항식 $P(x)=x^3+2x^2+ax+5$가 $x-1$로 나누어떨어지게 하는 상수 a의 값을 구하시오.

풀이 ▶ $P(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지면 인수정리에 의하여 ______

______ 이므로

______, 즉 $a=$ ______

답 ______

문제 7 다항식 $P(x)=x^3-4x^2-2ax-a$가 $x+2$로 나누어떨어지게 하는 상수 a의 값을 구하시오.

문제 8 다항식 $P(x)=3x^3+ax^2+bx+12$가 $(x-2)(x-3)$으로 나누어떨어지게 하는 상수 a, b의 값을 다음 순서에 따라 구하시오.

(1) $P(x)$를 $(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$로 놓고 $P(x)$가 $x-2$, $x-3$으로 각각 나누어떨어짐을 확인하시오.

(2) 인수정리를 이용하여 상수 a, b의 값을 구하시오.

생각을 넓히는 수학

문제 만들기

모둠 활동

다음을 읽고 모둠별로 항등식을 이용하여 풀 수 있는 문제를 만들고, 만든 문제를 다른 모둠과 바꾸어 풀어 보자.

스스로 확인하기

정답 및 풀이 281쪽

1

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 등식 $ax^2-3x+1=4x^2+bx+1$이 x에 대한 항등식이면 $a=$□, $b=$□(이)다.

(2) 다항식 $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 □(이)다.

(3) 다항식 $P(x)$가 $x-1$로 나누어떨어질 때, $P(1)=$□(이)다.

2

다음 등식이 x에 대한 항등식이 되게 하는 상수 a, b, c의 값을 구하시오.

(1) $x^3+ax^2+bx+2=x(x^2+1)+c$

(2) $ax(x-1)(x+1)+b(x-1)(x+1)+x+1+c$
$=x^3-2x^2$

3

다항식 $P(x)=4x^3-x+2$를 다음 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

(1) $2x-1$ (2) $4x+3$

4

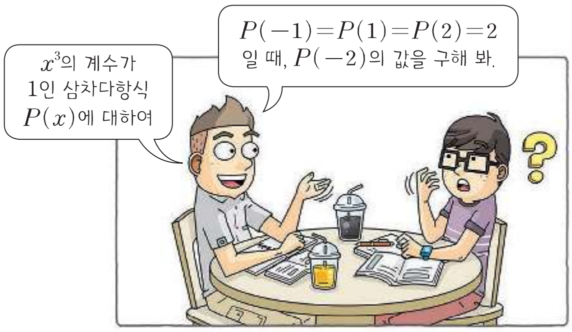
다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 2이고, $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 1이다. $P(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

5

다항식 x^3+ax^2+bx-4는 $x+2$로 나누어떨어지고, $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 6이다. 상수 a, b의 값을 구하시오.

6 창의・융합

다음을 읽고 순서에 따라 $P(-2)$의 값을 구하시오.



(1) 다항식 $Q(x)$를
$$Q(x)=P(x)-2$$
라 할 때, 삼차다항식 $Q(x)$의 일차식인 인수를 모두 구하시오.

(2) $Q(x)$를 구하시오.

(3) $P(x)$를 구하고, $P(-2)$의 값을 구하시오.